

Actividad 3: Comprendiendo la reversibilidad por medio de la función inversa

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan responsablemente para lograr metas comunes; en este caso, comprender la aplicabilidad de la inversa de una función y entender cuáles son sus aportes al desarrollo científico. Como punto de partida, se analiza el problema de determinar la edad de un fósil a partir del método del carbono 14 y se modela el fenómeno por una función exponencial. Además, se pretende que encuentren la inversa de funciones, apoyándose tanto en la representación y la reflexión de la curva sobre la función identidad, como en cálculos algebraicos. Para esto, se espera que piensen con flexibilidad para reelaborar sus ideas y creencias sobre el trabajo con funciones.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

LOS FÓSILES

1. Seguramente has escuchado hablar del descubrimiento de fósiles de miles de años, que permiten inferir cómo era la vida hace tanto tiempo. ¿Cómo es posible que los científicos puedan conocer su edad? ¿Por qué pueden afirmar con tanta seguridad, por ejemplo, que tal fósil tiene alrededor de 30 000 años? Comparte tus ideas con tu compañero.
2. Lee la siguiente información con tu compañero: “Un método muy usado por los científicos es el del carbono 14 (C-14). Aunque presenta algunos problemas, como que no es válido para datar fósiles de más de 50 000 años, su fundamento es simple y se basa en el periodo de descomposición del fósil.

El carbono 14 es un isótopo⁷ del carbono que se forma en las partes altas de la atmósfera a partir del nitrógeno. Cuando una planta hace la fotosíntesis, desde que nace hasta que muere, fija carbono en su interior, que incluye el isótopo carbono 14. Cuando muere la planta, comienza la fosilización y el proceso inverso: el carbono 14 empieza a transformarse de nuevo en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno que hay en el fósil encontrado, se puede conocer su edad aproximada”.

- a. Averigua las palabras que no entendiste y busca su definición en un diccionario o en la web.
 - b. Comparte tus definiciones con tu compañero.
 - c. Busca las palabras clave para describir el texto y formula una o dos frases con ellas. Compártelas con tu compañero.
3. Lee el resto del siguiente texto: “En los seres vivos que no son plantas, el proceso de fijación de carbono 14 ocurre cuando se alimentan de organismos que sí hacen la fotosíntesis. En el animal, cuando muere, empieza el mismo proceso que en la planta muerta. El carbono 14 comienza a transformarse en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno, se establece su edad. La masa de carbono 14 de cualquier fósil disminuye exponencialmente. Sabiendo la diferencia entre la proporción de carbono 14 que debería contener un fósil si aún estuviese vivo y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte”.
- a. Explícale a tu compañero con tus propias palabras lo que entendiste del texto.
 - b. ¿Qué relación podría tener el texto con las funciones? Comparte tu idea a tu compañero y traten de formar una sola idea.
 - c. Si encontraran un fósil, ¿qué podrían hacer para determinar hace cuánto tiempo vivió? Averigua cómo lo hacen los científicos.

Conexión
interdisciplinaria:
**Ciencias para la
ciudadanía.**
OA a, e, 3° y 4° medio

DETERMINANDO LA EDAD DE UN FÓSIL Y LA FUNCIÓN INVERSA

1. El periodo de semi-descomposición o vida media es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radioactiva. Para el carbono 14, este período es de 5 730 años.
 - $f(0)$ es la cantidad de carbono 14 al momento de morir.
 - t es el tiempo transcurrido luego de la muerte del ser vivo.
 - $f(t)$ es la cantidad de carbono 14 hallada en la muestra en el tiempo t .
- a. Completa la tabla con la proporción de carbono 14 que habrá en un fósil, transcurridos los períodos de tiempo que se indican, a partir de la muerte de un ser vivo.

⁷Se denomina isótopos a los átomos de un mismo elemento, cuyos núcleos tienen una cantidad diferente de neutrones y, por lo tanto, difieren en número másico. Fuente: Wikipedia.

Tabla 1: Relación entre el tiempo transcurrido y la proporción de C14

Tiempo (vida media) t	Proporción de C14, respecto de $f(0)$, que hay en la muestra $\frac{f(t)}{f(0)}$
0 (en $f(0)$)	1
5730	$\frac{1}{2}$
11 460	$\frac{1}{4}$
17 190	
22 920	

- Bosqueja esta relación en el plano cartesiano; gradúa adecuadamente los ejes.
- Señala si la relación es funcional. Argumenta.
- Indica dominio y recorrido de $\frac{f(t)}{f(0)}$ y conjunto de partida y llegada.
- Describe cómo varía $\frac{f(t)}{f(0)}$ por cada 5 730 años que transcurren desde la muerte del ser vivo.
- ¿Conoces algún modelo matemático que permita acercarse a la función entre $\frac{f(t)}{f(0)}$ y t ?

Conexión
interdisciplinaria:
**Ciencias para la
ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

- Para los restos fósiles, el valor de la proporción entre el carbono 14 en un periodo t , respecto del carbono 14 que había al momento de la muerte del ser vivo, viene dado por la expresión:

$$\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-0,00012t}$$

Para poner a prueba el modelo encontrado:

- Describe la velocidad de decrecimiento de $\frac{f(t)}{f(0)}$ respecto de t . Indica los criterios que has usado.
- Si un ser vivo murió hace 12 000 mil años, ¿qué porcentaje de C14 debería contener su fósil?
- Comprueba con el modelo algebraico que, a los 5 730 años, la proporción de C14 es $\frac{1}{2}$. Explica los cálculos realizados.

Conexión
interdisciplinaria:
**Ciencias para la
ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

- ¿Cómo se aplica el modelo anterior si se quiere determinar la fecha de muerte de un ser vivo, cuyo fósil contiene 23% de carbono 14?

En la actualidad, este método se utiliza así, “de forma inversa”, dado que hay dispositivos lo suficientemente precisos para determinar el porcentaje de C14 en un fósil, y lo que se desea es saber de qué época es.

- ¿Siempre se puede determinar un valor t para un porcentaje de C14 dado?

- b. ¿Se puede “revertir” lo que hace la función para conocer el valor de t ?
 - c. Si f transforma a t en $f(t)$, ¿se puede determinar una función que transforme a $f(t)$ en t ?
4. Se desea conocer la data de muerte de un fósil con un 23% de C14.
 - a. ¿Cómo podrías usar la expresión anterior $f(t)$ para determinar t ?
 - b. ¿Cómo podrías encontrar una expresión para t desde la expresión algebraica de $f(t)$?
 5. Enuncia en términos generales la expresión para determinar t en términos de $f(t)$.
 - a. La expresión encontrada, ¿es también una función?
 - b. ¿Qué restricciones debería tener el conjunto de partida y llegada de f para que la nueva expresión pueda ser una función?
 - c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta nueva función?
 6. Reescribe la nueva función, considerando que ahora t es $f^{-1}(t)$ y que $f(t)$ ahora es t .
 - a. ¿Qué crees que significa esto?
 - b. ¿Por qué se puede y debe hacer este cambio?
 7. Evalúa ambas funciones en $t = 1$ y luego en $t = 0,5$
 - a. En f , ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0,5$?
 - b. En f^{-1} , ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0,5$?

REPRESENTANDO LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

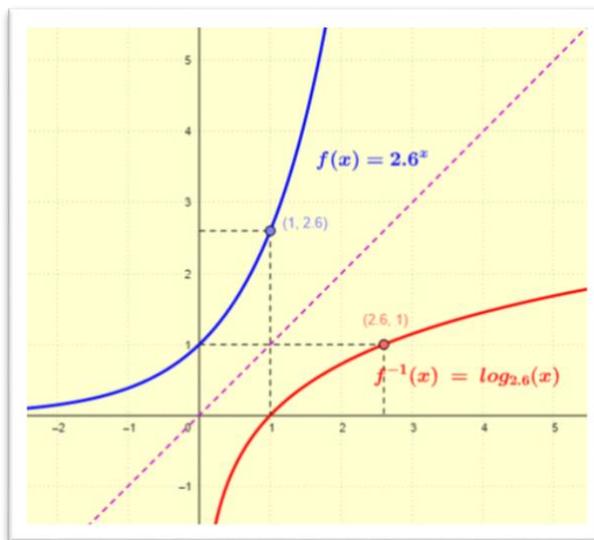
1. Consideren la función $f(x) = 2^x$.
 - a. ¿Conocen algún problema que se pueda modelar con una función de este tipo?
 - b. ¿Cuáles son el conjunto de partida y de llegada de esta función?
 - c. Despejen x en términos de $f(x)$. ¿Qué expresión algebraica obtienen?
 - d. Reescriban la nueva expresión, considerando que ahora x es $f^{-1}(x)$ y que $f(x)$ ahora es x . Expliquen por qué se debe hacer este cambio en las variables.
2. En un mismo plano cartesiano, grafiquen $f^{-1}(x)$ y $f(x)$.
 - a. Describan qué particularidades ven en ambas gráficas.
 - b. ¿Qué ocurre en el punto $(0,1)$ y su simétrico?
 - c. Dibujen la recta $y = x$ en el plano cartesiano anterior. ¿Qué pueden decir de ambas curvas respecto de la recta $y = x$?
3. La función cuadrática $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = x^2$, ¿tiene inversa?
 - a. Grafiquen la función h .
 - b. Luego grafiquen $y = x$.
 - c. ¿Qué deberían esperar de la función inversa con respecto a la gráfica?
 - d. ¿En qué intervalos de \mathbb{R} está definida la función h^{-1} ?

- e. ¿En qué intervalos de \mathbb{R} para h existe h^{-1} ?
- f. ¿Qué condición debe cumplir la definición de una función para que exista su función inversa?
- g. Obtengan h^{-1} de forma algebraica. Indiquen las restricciones del dominio y recorrido.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La introducción de la función inversa se puede hacer directamente desde un gráfico, o mediante un contexto científico que requiere dar respuestas a los diferentes problemas. Se presenta una función exponencial dependiente del tiempo, y se plantea como una necesidad del mismo contexto invertir el camino; es decir, buscar un valor de tiempo, dado un valor del recorrido. Se desea instalar la idea intuitiva de que buscar una función inversa equivale a realizar el camino inverso: si f transformó a t en $f(t)$, entonces se desea invertir aquello que hizo f a t para determinar t , conociendo $f(t)$.
2. Para que los estudiantes reconozcan el modelo inicial, se recomienda usar una lista sistemática de valores que relacionen t y $\frac{f(t)}{f(0)}$, y no presentar de inmediato la función modeladora. En este caso, $\frac{f(t)}{f(0)}$ va variando cada 5 730 años en la mitad de su valor anterior, partiendo de 1, pues al relacionar $f(t)$ y $f(0)$ se tiene una proporción, motivo por el cual se puede interpretar su resultado como porcentaje. En este ejemplo, $\frac{f(t)}{f(0)} = 0,23$ se interpreta como 23%.
3. Se considera el estudio de $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$ y no de $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, dado que lo que se mide en la realidad es una comparación entre lo que había y lo que se encuentra al momento de medir el C14 en el fósil. En la literatura, la expresión aparece como $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, pero, para simplificar el tema, se ha optado por trabajarlo de forma explícita como la comparación, usando $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$.
4. De igual modo, simplificando el problema, se propone presentar el modelo con el valor $k = 0,00012$, donde el docente debe evaluar si esto es necesario o puede plantearlo como un desafío a algunos o todos sus estudiantes. En el recuadro de sugerencia, junto al punto 2, se muestra una forma de encontrar el valor de k .
5. El profesor debe supervisar constantemente la notación de función inversa que se introduce, pues se sabe que –en el estudio de las funciones– entender la notación que se usa es difícil para los estudiantes. En este caso, se debe enfatizar en que la inversa de una función no es lo mismo que el inverso multiplicativo de ella. No es igual f^{-1} que $\frac{1}{f}$.
6. Se sugiere indicarles que se puede determinar la inversa de una función, siguiendo la definición de función inversa como $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, donde $f: A \rightarrow B$ y $f^{-1}: B \rightarrow A$, y agregando que f debe ser biyectiva en todo el dominio o en un intervalo de él.

7. En los tres casos de funciones y sus inversas, se analiza la forma gráfica de las funciones inversas, en caso de existir. Usando la recta $y = x$, se busca la curva simétrica de $f(x)$ y se obtiene $f^{-1}(x)$. Conviene usar algún programa para visualizar la curva y su simétrica a partir de una recta. Así se puede ir generalizando la función inversa de las funciones lineal, cuadrática, potencia y exponencial.



8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
 - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
 - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Contenidos breves y ejemplos de función inversa
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/funcion-inversa/>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatío.com/calculo-de-la-funcion-inversa-ejercicios-resueltos-paso-a-paso/>
- GeoGebra
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc>
- El carbono 14 explicado de forma sencilla
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.portalastronomico.com/el-carbono-14/>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.ehu.eus/biomoleculas/isotopos/carbono14.htm>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm>
- Calculadora de funciones inversas, solo la parte algebraica
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.symbolab.com/solver/function-inverse-calculator/inversa%20f%5Cleft%28x%5Cright%29%3Dx%5E3?or=ex>